



Final Project:
Continuous Time Gathering With Finite Visibility And
Bearing-Only Sensing ^[1]
Robotics Seminar – 236824
Winter 2019

Nitzan Madar
203483334

תוכן עניינים

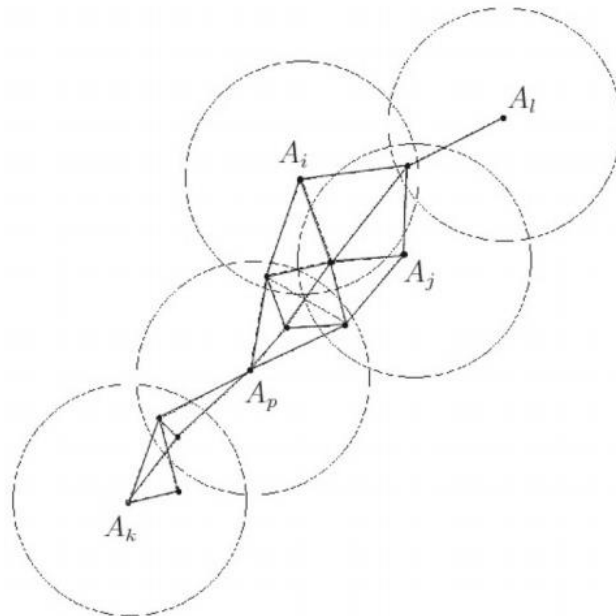
1	תקציר	3
2	רקע מתמטי	3
2.1	קשירות לעולם לא נעלמת	4
2.2	התכנסות בזמן סופי	6
3	הסימולציה	9
3.1	חוקי המהירות שהסימולציה מציגה	9
3.1.1	מהירות קבועה	9
3.1.2	סכום מרחקי השכנים קיצוניים	9
3.1.3	סכום היטלי מרחקי השכנים קיצוניים	10
3.2	ממשק הסימולציה	11
	רשימת מקורות	13
	נספחים	13

רשימת גרפים

איור 1	: דוגמא לגרף הראייה של סוכנים במישור וטווח הראייה שלהם	3
איור 2	: הגדרת הוקטרים של קצה גזרת הסוכנים שבטווח הראייה	4
איור 3	: הסבר גיאומטרי לכך ש- $ui + Tui \geq 0$	5
איור 4	: זווית בקמור הבעיה	6
איור 5	: הגדרת זוויות עבור קודקוד בקמור	7
איור 6	: חוק המהירות השני שהוגדר בסימולציה	9
איור 7	: חוק השלישי שהוגדר בסימולציה	10

1 תקציר

מסמך זה יעסוק בחקר תיאורטי וביצוע סימולציות של קבוצת סוכנים ניידים, זהים, אנונימיים וחסרי זכרון אשר להם היכולת למדוד רק כיוון של שכניהם (Bearing) בטווח ראייה סופי. במסמך נראה כי בתנאים הנ"ל הסוכנים מגיעים לאיחוד בנקודת מפגש יחידה (Gathering) ע"י חוקי תנועה פשוטים. במסמך זה נתעסק במידול בזמן רציף, וחוק התנועה יהיה כלהלן: הגדרת הגזרה הקטנה ביותר בה כולם השכנים הנראים נמצאים ע"י הקיצוניים ביותר ומדידת זווית המפתח שלה. אם הזווית שתימדד תהיה קטנה מ- π אזי נגדיר את כיוון המהירות למרכז הגזרה ע"י סכום של 2 וקטור היחידה המגדירים את קצוות הגזרה. אחרת, על הסוכן להשאר במקומו. נגדיר את הגרף הפשוט בין השכנים הרואים זה את זה, ונוכיח כי אם הגרף ההתחלתי יהיה קשיר – אזי מובטח כי הסוכנים יגיעו לאיחוד בנקודת מפגש יחידה.



איור 1 : דוגמא לגרף הראייה של סוכנים במישור וטווח הראייה שלהם

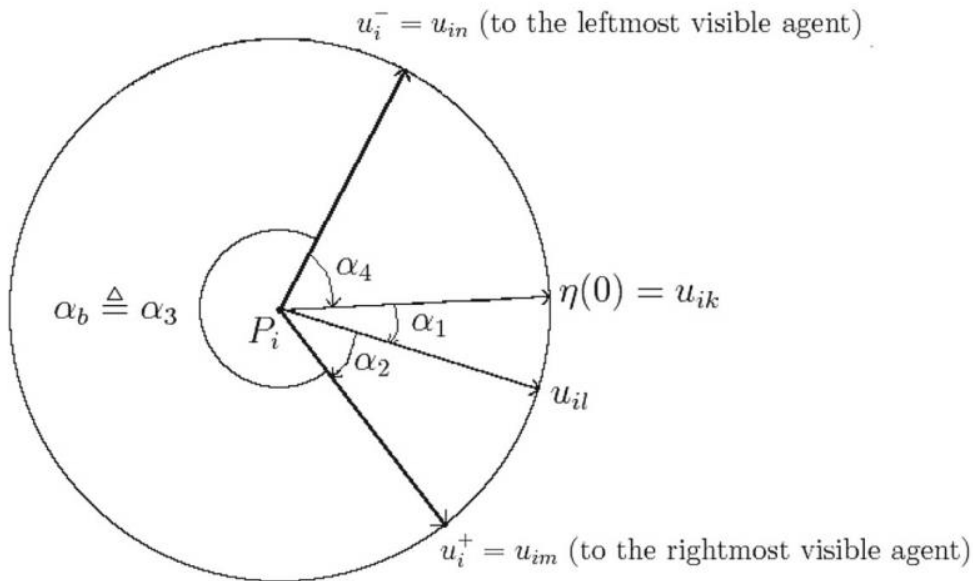
2 רקע מתמטי

נסמן N סוכנים במרחב הדו-מימדי בקוארדינטות $P_i = (x_i, y_i)^T$ כאשר $i = 1, 2, \dots, N$ ובעזרת כך נגדיר את וקטור המיקום היחסי (מ- i אל j):

$$u_{ij} = \begin{cases} \frac{P_j - P_i}{\|P_j - P_i\|} & 0 < \|P_j - P_i\| \leq V \\ 0 & \|P_j - P_i\| = 0 \text{ or } \|P_j - P_i\| > V \end{cases}$$

כאשר V הוא רדיוס של טווח הראייה של כל הסוכנים (היות והם דומים הינו אחיד לכולם, אילו היו בעלי תכונות שונות היה נדרש להגדיר לכל סוכן רדיוס טווח ראייה משלו).

בנוסף נגדיר את הוקטורים שמגדירים את קצוות הגזרה של הסוכנים שבטווח הראייה ע"י u_i^- ו- u_i^+ , אשר ניתן להמחיש היטב באמצעות האיור הבא :



איור 2 : הגדרת הוקטורים של קצה גזרת הסוכנים שבטווח הראייה

כעת, נגדיר את הדינמיקה הרצויה בבעיה – נרצה שהמהירות תתנהג לפי :

$$\frac{dP_i}{dt} = v_0 (u_i^+ + u_i^-) \quad \text{for } i = 1, \dots, N \quad (1)$$

כאשר v_0 הינו קבוע חיובי, והמהירות אם כן תהיה בטווח $[0, 2v_0]$ כאשר מהירות אפס תתקבל כאמור כאשר זווית המפתח גדולה מ- π .

2.1 קשירות לעולם לא נעלמת

נרצה להוכיח אמירה זו תחת הדינמיקה :

$$\{\dot{P}_i = v_0 (u_i^+ + u_i^-)\}_{i=1, \dots, N}$$

נגדיר את המרחק בין צמד סוכנים אשר נמצאים בטווח הראייה אחד של השני :

$$\Delta_{ij} = \|P_j - P_i\| = \left[(P_j - P_i)^T (P_j - P_i) \right]^{1/2}$$

נרצה להוכיח כי הנגזרת של המרחק בין צמד סוכנים הינה אי-חיובית, דהיינו השינוי במרחק הוא רק לקטון וכך נוכיח את העובדה שרכיבי קשירות נשמרים. נגזור :

$$\frac{d}{dt} \Delta_{ij}^{(t)} = \frac{1}{\|P_j - P_i\|} (P_j - P_i)^T (\dot{P}_j - \dot{P}_i)$$

נציב את ההגדרה של הוקטור היחסי שהגדרנו קודם :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta_{ij}^{(t)} &= u_{ij}^T (\dot{P}_j - \dot{P}_i) \\ &= -u_{ij}^T \dot{P}_i + u_{ij}^T \dot{P}_j \\ &= -u_{ij}^T \dot{P}_i - u_{ji}^T \dot{P}_j \end{aligned}$$

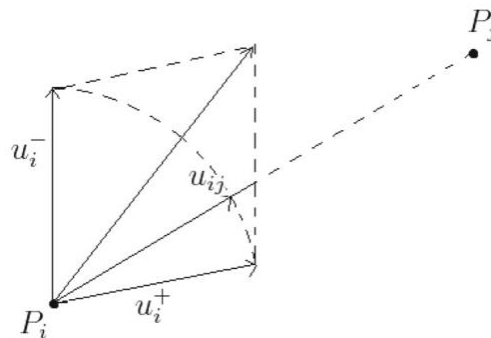
אבל מתוך הדינמיקה אנו יודעים כי :

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= v_0 (u_i^+ + u_i^-) \\ \dot{P}_j &= v_0 (u_j^+ + u_j^-) \end{aligned}$$

לכן :

$$\frac{d}{dt} \Delta_{ij}^{(t)} = -v_0 u_{ij}^T (u_i^+ + u_i^-) - v_0 u_{ji}^T (u_j^+ + u_j^-)$$

ניתן לשים לב כי יש דמיון בין איברי הביטוי לנגזרת, נתבונן בצורה גיאומטרית בביטוי $u_{ij}^T (u_i^+ + u_i^-)$:



איור 3 : הסבר גיאומטרי לכך ש- $u_{ij}^T (u_i^+ + u_i^-) \geq 0$

כפי שאמרנו קודם, הביטוי $(u_i^+ + u_i^-)$ יכול להתאפס אם הסוכן מוקף ("Surrounded"), זווית המפתח גדולה מ- π או שהוא יהיה בכיוון מרכז הגזרה שבה נמצאים סוכנים בטווח הראייה שלו. לכן המכפלה הפנימית $u_{ij}^T (u_i^+ + u_i^-)$ חייבת להיות חיובית (גיאומטרית) – יש לביטויים היטלים אחד על השני באותו כיוון, ראה איור 3). ולכן אם נפשט את הביטוי נוכל להסיק כי :

$$\frac{d}{dt} \Delta_{ij}^{(t)} = - \left(v_0 u_{ij}^T (u_i^+ + u_i^-) + v_0 u_{ji}^T (u_j^+ + u_j^-) \right) \leq 0$$

דהיינו, קצב השינוי של המרחקים היחסיים קטן או שווה לאפס ומכאן שהמרחקים בין שכנים חייבים לקטון או להשאר אותו הדבר.

■

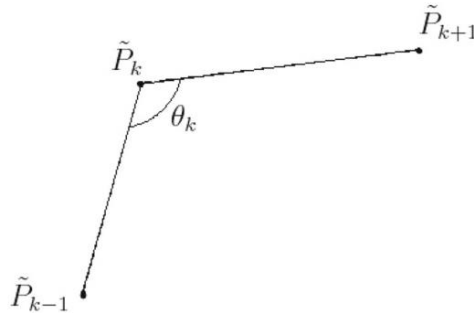
2.2. התכנסות בזמן סופי

לאחר שהוכחנו כי צמד שכנים ישאר שכנים ב-2.1, נרצה להוכיח כי בהתקדמות הזמן מצטרפים שכנים וכך כולם מתקבצים לנקודה אחת.

בכדי לבצע זאת, נצטרך להגדיר פונקציית ליאפונוב, נגדיר אותה להיות אורך היקף הקמור (Convex Hull) של הבעיה. נניח כי קודקוד הקמור מוגדרים ע"י הסוכנים:

$$\{\tilde{P}_k(t)\} \quad k = 1, \dots, K \leq N.$$

נתבונן בזוויות הקמור:



איור 4 : זווית בקמור הבעיה

כפי שניתן לראות כל זווית בקמור מקיימת: $\theta_k \leq \pi$, ולכן ניתן להבין כי זווית הגזרה של סוכן מהקמור תקיים: $\alpha_k \leq \theta_k \leq \pi$ ולכן כל וקטור התקדמות (המוגדר ע"י $u_i^+ + u_i^-$) לא יתאפס לפי ההגדרה ולכן הסוכן יתקדם אל תוך הקמור.

נגדיר פונקציית הליאפונוב להיות:

$$L(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} \Delta_{k,k+1} = \sum_{k=1}^{K(t)} \left[(\tilde{P}_{k+1}(t) - \tilde{P}_k(t))^T (\tilde{P}_{k+1}(t) - \tilde{P}_k(t)) \right]^{1/2}$$

נגזור:

$$\frac{d}{dt} L(t) = -v_0 \sum_{k=1}^K \tilde{u}_{k,k+1}^T (u_k^+ + u_k^-) - v_0 \sum_{k=1}^K \tilde{u}_{k+1,k}^T (u_{k+1}^+ + u_{k+1}^-)$$

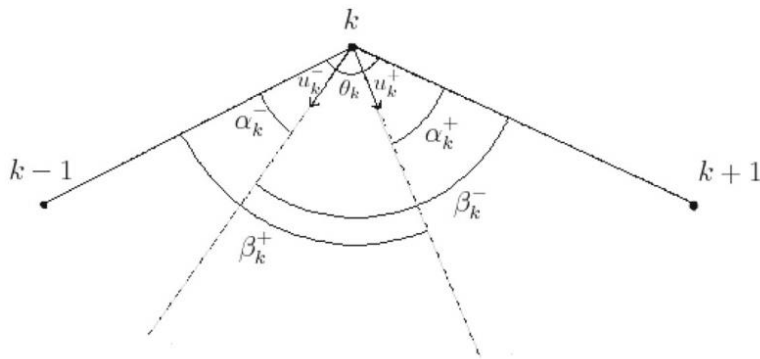
נשנה את האינדקס בסכום השני ונקבל:

$$\frac{d}{dt}L(t) = -v_0 \sum_{k=1}^K \tilde{u}_{k,k+1}^T (u_k^+ + u_k^-) - v_0 \sum_{k=1}^K \tilde{u}_{k,k-1}^T (u_k^+ + u_k^-)$$

ומכאן :

$$\frac{d}{dt}L(t) = -v_0 \sum_{k=1}^K \langle u_k^+, \tilde{u}_{k,k+1} + \tilde{u}_{k,k-1} \rangle - v_0 \sum_{k=1}^K \langle u_k^-, \tilde{u}_{k,k+1} + \tilde{u}_{k,k-1} \rangle$$

נשים לב שיש לנו מכפלות פנימיות בין וקטורי יחידה אשר מניבים סכומי קוסינוסים של הזוויות שבניהם, נגדיר את הזוויות כך :



איור 5 : הגדרת זוויות עבור קודקוד בקמור

ולכן :

$$\begin{aligned} \alpha_k^+ &\triangleq \gamma(u_k^+, \tilde{u}_{k,k+1}) \\ \beta_k^+ &\triangleq \gamma(\tilde{u}_{k,k-1}, u_k^+) \\ \alpha_k^- &\triangleq \gamma(\tilde{u}_{k,k-1}, u_k^-) \\ \beta_k^- &\triangleq \gamma(u_k^-, \tilde{u}_{k,k+1}) \end{aligned}$$

כאשר $\gamma(u, v)$ הינה הזווית הנוצרת בין הוקטורים u ו- v .

נדגיש כי כאן מתקיים :

$$\alpha_k^+ + \beta_k^+ = \alpha_k^- + \beta_k^- = \theta_k$$

וכל הזוויות הנ"ל הינן בין 0 ל- π . ובעזרת כל ההגדרות שנתנו נוכל לבטא את נגזרת פונקציית הליאפונוב שהגדרנו להיות :

$$\frac{d}{dt}L(t) = - \sum_{k=1}^K v_0 (\cos \alpha_k^+ + \cos \beta_k^+) - \sum_{k=1}^K v_0 (\cos \alpha_k^- + \cos \beta_k^-)$$

נשתמש בזהות שמוכחת בנספחים :

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &\geq 1 + \cos(\alpha + \beta) \\ 0 &\leq \alpha, \beta, \alpha + \beta \leq \pi\end{aligned}$$

ונוכל לרשום :

$$-\frac{d}{dt}L(t) \geq 2v_0 \sum_{k=1}^K (1 + \cos \theta_k)$$

נשתמש בלמה 1 המוצגת ב-[1] אשר גורסת כי :

$$\sum_{k=1}^K \cos(\theta_i) \geq \begin{cases} 1 + (K - 1) \cos\left(\frac{(K-2)\pi}{K-1}\right), & 2 \leq K \leq 6 \\ K \cos\left(\frac{(K-2)\pi}{K}\right), & K \geq 7 \end{cases}$$

ולכן נוכל לחסום את הנגזרת של פונקציית ליאפונוב שהגדרנו ע"י :

$$-\frac{d}{dt}L(t) \geq \mu(K)$$

כאשר :

$$\begin{aligned}\mu(K) &= 2v_0 \left(K + \begin{cases} 1 + (K - 1) \cos\left(\frac{(K-2)\pi}{K-1}\right) & 2 \leq K \leq 6 \\ K \cos\left(\frac{(K-2)\pi}{K}\right) & K \geq 7 \end{cases} \right) \\ &= 2v_0 K \left(1 - \max \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{K}\right), \frac{K-1}{K} \cos\left(\frac{\pi}{K-1}\right) - \frac{1}{K} \right\} \right)\end{aligned}$$

וכך גם נוכל לומר כי זמן ההתכנסות הוא :

$$\mu(N)T_{ub} = L(0) \Rightarrow T_{ub} = \frac{L(0)}{\mu(N)}$$

3 הסימולציה

היות ולפני רגע הצגת הפרויקט שלי, בוצעה הצגה על נושא דומה החלטתי לנסות לשדרג מעט את הסימולציה שבניתי ע"י כך שסידרתי את הממשק טיפה אחרת וניסיתי להגדיר 2 חוקי מהירות חדשים אשר מתבססים על המוצג במאמר שעליו מתבסס מסמך זה, ולנסות לבצע השוואה ביניהם.

3.1 חוקי המהירות שהסימולציה מציגה

חוקי המהירות בהם השתמשתי כולם מוגדרים לכיוון חוצה הזווית, וזאת על מנת להבטיח התכנסות לנקודה בזמן סופי כפי שהוכח במאמר. אבל, רציתי טיפה לשחק עם גודל המהירות ולתת איזושהו תלות בשכנים הקיצוניים אשר מגדירים את זווית המפתח – אם כבר מבצעים חישובים עבורם, אניח כי גם נדע גם מה המרחק שלהם מאותו סוכן ונשתמש בזה. על כן חוקי המהירות הם כלהלן:

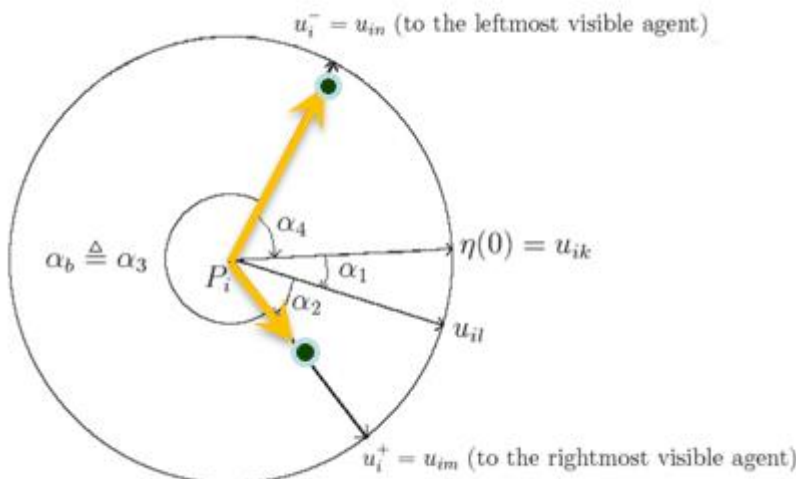
3.1.1 מהירות קבועה

כבסיס להשוואה, באופן הגיוני, ניקח את חוק המהירות בו התעסק המאמר. כיוון חוצה הזווית מוגדר שם ומוכחת התכנסות לנקודה בזמן סופי. אך בסימולציה את קבועה המהירות אשר מכפיל אותה נוכל להגדיר בממשק התוכנה.

חוק מהירות זה הוכח כמתכנס, אך מצד שני יש לדעת להגדיר נכון את המהירות. היות ואם טועים בסקאלת המהירות נוכל לקבוע תופעות זה מהירות גבוהה ביחד למצב עד לרמה של ניתוק שכנים או אף קפיצה בין מצבים.

3.1.2 סכום מרחקי השכנים קיצוניים

תחת הנחה שעבור הקיצוניים אני גם יכול למדוד את מרחקם נבנה את חוק המהירות הבא:



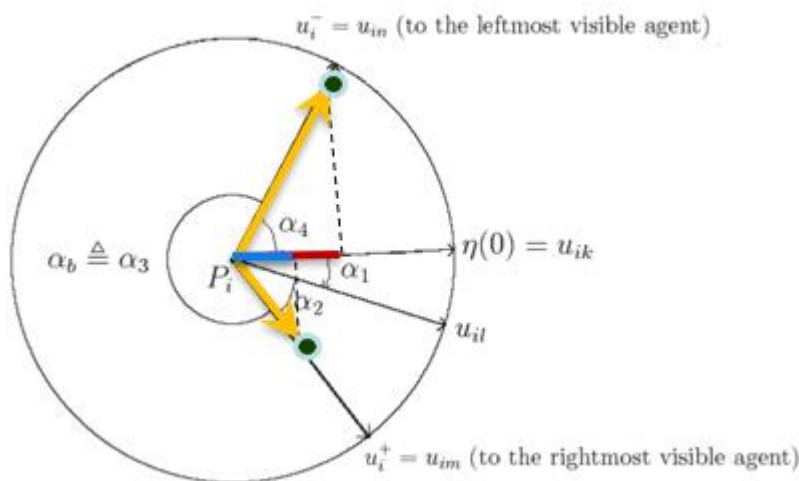
איור 6 : חוק המהירות השני שהוגדר בסימולציה

כאן, כל סוכן ינוע בכיוון חוצה הזווית כמו בדינמיקה שהודרה במאמר רק שגודל המהירות הוא כסכום המרחקים של השכנים הקיצוניים (הוקטורים המסומנים בצהוב באיור 6).

היתרון בחוק מהירות זה הוא שהמהירות אינה קבועה וכן קיימת רגישות למצב – כלומר, המהירות תיקטן כאשר השכנים יתקרבו לאיחוד בנקודה.

3.1.3 סכום היטלי מרחקי השכנים קיצוניים

בדומה לחוק המהירות שהוגדר ב-סכום מרחקי השכנים קיצוניים 3.1.2, גם כאן הנחת מדידת מרחקים מהשכנים הקיצוניים קיימת, אך בנוסף לכך מטילים את המהירות בכיוון ההתקדמות, כך:

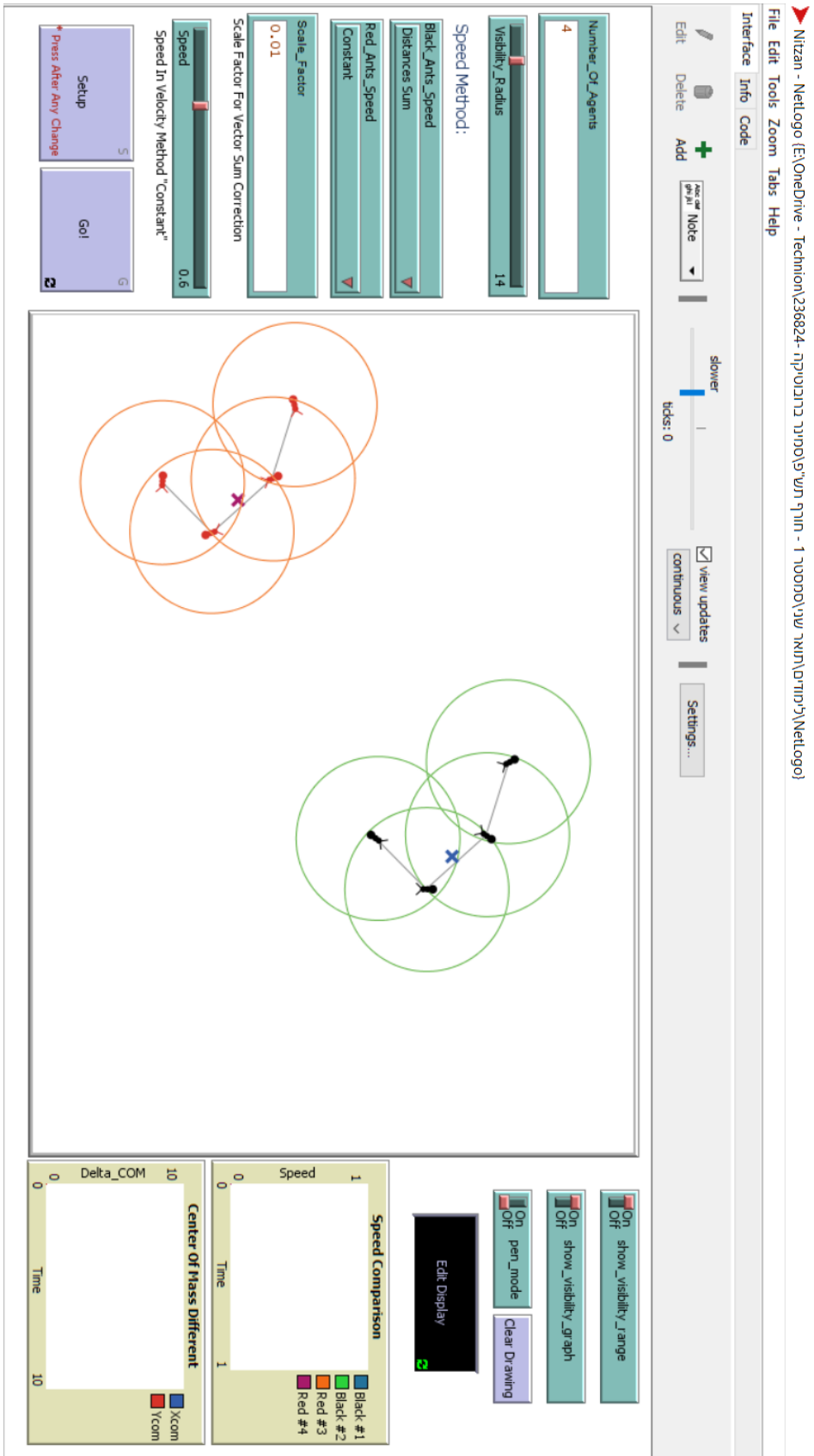


איור 7 : חוק השלישי שהוגדר בסימולציה

כאן היתרון הוא שיש משמעות גם לגודל הזווית המפתח, ככל שהיא קטנה יותר והשכנים יותר מקובצים כך המהירות תהיה גדולה יותר. יחד עם זאת, זהו גם החסרון של השיטה, במצב בו המפתח גדול, היטל המרחקים קטן יותר וכך הוא מקטין עוד יותר את המהירות. נוסף על כך, קיימת גם משמעות למרחק השכנים הקיצוניים בדומה למה שהוצג בחוק המהירות ב-3.1.2.

3.2. ממשק הסימולציה

הסימולציה נכתבה בתוכנת NetLogo 6.1.1 וממשק התוכנה נראה כך :



פירוט הכפתורים אופן השימוש בה הוא כלהלן :

מצד שמאל -

- Number of Agents : הגדרת מספק הסוכנים שנרצה שיוצגו לכל חוק מהירות בנפרד
- Visibility Radius : טווח הראייה של כל סוכן
- Black Ants Speed : הגדרת חוק המהירות עבור קבוצת הנמלים השחורות. האופציות הן בדומה למה שהוגדר קודם -
 - o Constant : חוק המהירות הראשון
 - o Distances Sum : חוק המהירות השני
 - o Projected Distances Sum : חוק המהירות השלישי
- Red Ants Speed : הגדרת חוק המהירות עבור קבוצת הנמלים האדומות בעלי אותן אופציות כמו לשחורות.
- Scale Factor : היות ומדובר על ערבוב בין יחידות (מרחקים מגדירים מהירות), הוכנסה האופציה לכפול את המהירות באיזשהו קבוע חיובי בכדי לשלוט במהירות. האופציה שימושית גם עבור השוואה לערך Speed שיוגדר בהמשך.
- Speed : גודל המהירות עבור חוק המהירות הקבועה (החוק הראשון).
- Setup : בכל שינוי של הפרמטרים לעיל יש ללחוץ על כפתור זה, אשר מפזר רנדומלית נמלים לפי הדרישה ומגדיר את חוקי המהירויות שהמשתמש בחר. יש לשים לב שפיזור הנמלים הינו זהה בין השחורות לאדומות.
- Go! : הפעלת הסימולציה. הכפתור מאפשר גם לבצע עצירות כדי לבחון שינויים.

מצד ימין -


- Show Visibility Graph : הצגת גרף הראייה בין הסוכנים בקבוצות השונות, שיהיה לפי טווח הראייה שהוגדר (יש להפעיל את Edit Display בכל שינוי)
- Show Visibility Range : יציג את גרף הראייה, כדאי לבדוק ויזואלית קשירות לפני הרצה (יש להפעיל את Edit Display בכל שינוי).
- Pen Mode : יצייר את מסלולי הנמלים במישור במהלך תנועתן.
- Clear Drawing : ימחק את מסלולי הנמלים (פלט ה-Pen Mode).
- Edit Display : מעדכן את התצוגה, רלוונטי לכפתור ה-On/Off שמעליו.
- Speed Comparison : גרף המציג השוואה של מהירויות של שני הנמלים הראשונות מכל קבוצה (קבוצת הנמלים השחורות וקבוצת הנמלים האדומות, 2 סוכנים סימטריים)
- Center Of Mass Different : גרף המציג את השתנות מרכז המסה (שמסומן בתצוגה כ-X כחול לנמלים השחורות וורד לנמלים האדומות).

כמו כן, מומלץ לשנות את מהירות הסימולציה לפי תחושת המשתמש, ולשנות מיקומים על-ידי הזזת הנמלים בכדי לבחון מקרים רלוונטיים.

רשימת מקורות

[Bellaiche, L.I., Bruckstein, A., \(2017\), Continuous time gathering of agents with limited visibility and bearing-only sensing](#) [1]

נספחים

הקובץ	שם הקובץ	#
 Presentation By Nitzan Madar - Continu	מצגת PPT תמציתית שמציגה את עיקרי העבודה	1
 NitzanMadar.nlogo	קובץ הסימולציה (תוכנת NetLogo 6.1.1)	2